

**ملاحظة:**

إذا كان  $(x, y)$  قضاء طوبولوجي و  $A$  قضاء جزئي من  $x$  و  $B$  مجموعة جزئية من  $A$

فإن المجموعة  $B$  تقاطع تراكم

إذا اعتبرنا  $B$  مجموعة جزئية من  $R$  فإن  $B$  تقاطع تراكم ونقاط لاصقة ونقاط داخلية لـ  $A$

وإذا اعتبرنا  $B$  مجموعة جزئية من  $x$  فإن  $B$  تقاطع تراكم ونقاط لاصقة ونقاط داخلية لـ  $x$

ومن الطبيعي أن ندرس العلاقة بين هذه النقاط

ومن أجل ذلك نعرّف  $B_A, \bar{B}_A, B^\circ_A$  في القضاء الجزئي  $A$  وبالمثل  $B_x, \bar{B}_x, B^\circ_x$

إن المبرهنات الآتية ترفن العلاقات بين هذه المجموعات:

**برهان:**

ليكن  $A$  قضاء جزئي في القضاء الطوبولوجي  $x$ ،  $B \subseteq A$  إن العلاقات الآتية محققة دوماً:

$$B_A = B_x \cap A \quad \Leftrightarrow A \supset B \quad \text{1. شققة}$$

$$\bar{B}_A = \bar{B}_x \cap A \quad \Leftrightarrow A \supset B \quad \text{2. دهاقة}$$

$$B^\circ_A = B^\circ_x \cap A \quad \Leftrightarrow A \supset B \quad \text{3. داخلية}$$

**البرهان:**

1- لنفرض أن  $e \in B_A$  (ه نقطة تراكم لـ  $B$  في  $A$ ) ولكن  $e$  حوارة شقياً لـ  $x$

ص المبرهنات السابقة فإن  $e \cap A$  هو حوارة للنقطة  $e$  في  $A$

وبما أن  $e$  نقطة تراكم فإن:

$$(e \cap A) \cap B \setminus \{e\} \neq \emptyset$$

$$e \cap B \setminus \{e\} \neq \emptyset$$

أي أن: النقطة  $e$  نقطة تراكم لـ  $B$  في  $x$   $\Leftrightarrow e \in B_x \cap A$

$$B_A \subseteq B_x \cap A$$

ومن جهة ثانية:

لنقرن  $e \in B_x \cap A$  وليكن  $u$  حوارة شقياً لـ  $A$  في القضاء الجزئي  $A$

ص المبرهنات السابقة  $\Leftrightarrow$  يوجد حوارة  $w$  لـ  $e$  في  $x$  بحيث:  $u = w \cap A$

وبحسب الآتي:

$$u \cap B \setminus \{e\} = w \cap A \cap B \setminus \{e\} = w \cap B \setminus \{e\} \neq \emptyset$$

$$w \cap B \setminus \{e\} \neq \emptyset \quad \text{وبما أن}$$



$B' \cap A \subseteq B'_A \iff a \in B'_A$  و هذایی ان

ومن علاقتي الأختاء تقدم المداواة

2- لدينا العلاقة التالية

وبالتالي ببيان هذه العلاقة محققه باي فضا، ظهوري = في محققه باي

فرضاً  $\mathcal{A}$  ضيقاً  $\mathcal{B}$  من  $\mathcal{A}$   $\Rightarrow \overline{B_A} = B_A \cup B$  ومنه  $\mathcal{A}$  ضيق البد الأول

$$\bar{B}_A = (B'_x \cap A) \cup B = (B'_x \cap A) \cup (B \cap A)$$

$$= (B'_A \cup B) \cap A = B'_A \cap A$$

$$B'_A \supseteq B'_x \cap A \quad -3$$

$B$  مجزئة مفتوحة  $\Leftrightarrow x \in A \cap B$  مفتوحة في  $A$  وهي مفتوحة في  $B \Leftrightarrow B$  في

مجموعة  $B$  داخلية  $A$  (أي  $A \supset B$ ) في المجموعة مفتوحة  $A$  (أي  $A \supset B$ )

\* مثال توصیفی :

لناحة القضاء العفوي R

$$A_R = ]0,3[ \iff (B=A) \quad ; \quad A = ]0,3[ \text{ و لکن}$$

اصبح هو ضا  $\Rightarrow$  هو مجردة معتزلة معلومة  
 $A^0_A = A$   
 باقي واث

وليفترض  $A = Q$  :

لوا اعتبرنا  $Q$  فصلاً جزئياً  $Q^0 = Q \implies Q_K = \emptyset$  و

سفرین سے

بفرض  $A$  فضاء مترياً،  $x$  قضاء،  $B \subseteq A$  تكون المجموعة  $B$  كثيفة في  $A$

( $\Rightarrow$ ) حالت لصافه  $B \not\subseteq X$  كوي ال  $A \Leftarrow A \cap B \supseteq A$

البرهان

بفرمیں  $B$  کثیفہ  $A$  کے لیے  $\overline{B}_A = A$

صواب البرهنة السابقة  $\bar{B}_x \supseteq A$  ،  $\bar{B}_x \cap A = A \Rightarrow$

ولبقرض  $A$  أن محتواه في  $\bar{B}_x$  أي  $\bar{B}_x \supseteq A \iff \bar{B}_x = \bar{B}_x \cap A = A$

۱۵۱ ان الحیوة B تنفذ A 2

ولذلك ان الآن ان فعلوا التصديق المشر هو تطيق قسم

± حرفه

لیکن  $f$  تطبیق سے  $x$  ای  $Y$  (کل فی  $x, Y$  وضاء طریقوں میں)

$$f: X \longrightarrow Y$$



Date : / /



Subject: .....

و  $A$  فضاء جزئياً من الفضاء  $X$ .إذا كان  $f$  تطبيقاً مستمر من  $X$  فإن صورة  $A$  يكون أيضاً مستمرة ويرمز له  $f|A$ .

$$A \xrightarrow{f|A} X \xrightarrow{f} Y$$

ترتيب تطبيقتين

$$f|A = f \circ I_A$$

بما أن  $f$  مستمر بالضرورة وتطبيقاً الأرخاد مستمر وترتيب تطبيقتين هو تطبيق مستمر وهو المطلوب.

\* ملاحظة:

لاحظنا أن مفهوم التطبيق المستمر هو تطبيق مستمر العكس يمر بصحيح في الحالة العامة:

\* مثال:

$$u(x) = \begin{cases} 1 & , x \in Q \\ 0 & , x \notin Q \end{cases}$$

وهي دالة ديرخلية

مستمرة تقريباً في كل مكان

وهي دالة غير قابلة للقياسية صباريمان

إذا كانت مستمرة

بأننا نتوسعة ومحدودة

أما استناد مجموعة قابلة للعد

مجموعة نقاط النظام

ومجموعة نقاط التقاطع غير قابلة للعد

أي أنها منفصلة عن عدد لا نهائي من النقاط أي أنها غير مستمرة

- لنأخذنا صورتها  $u|Q = 1$  وهي دالة ثابتة لأنها ثابتة في  $Q$ 

وبالتالي فإن صورتها مستمر وهي غير مستمرة

\* فضاء القسمة:

لنأخذ  $(X, \tau)$  فضاء طوبولوجياً،  $\mu$  علاقة تكافؤ على المجموعة  $X$ - أن علاقة التكافؤ هذه تقسم المجموعة  $X$  إلى صفوف تكافؤ! أن صف تكافؤ الذييمثله العنصر  $x$  ونرمزه بـ  $[x]$  أو  $[x]_\mu$  نجد أنه يتألف من جميع عناصر المجموعة  $X$ المتكافئة لـ  $x$  وفق  $\mu$   $[x]_\mu = \{y \in X : x \mu y\}$  وندعوه صف تكافؤ محتمل  $x$ - أن مجموعة صفوف التكافؤ هي مجموعة القسمة ويرمز لها بـ  $X/\mu$ 

• ويجب أن نتذكر أن صف التكافؤ هو عنصر واحد أو (نقطة) من مجموعة القسمة

بينما هو مجموعة جزئية من  $X$ • هدفنا تحول مجموعة القسمة لفضاء طوبولوجي  $\Leftarrow$  ونسميه فضاء القسمة $\Leftarrow$  لنأخذ طوبولوجياً على مجموعة القسمة لنعوم بالآتي:

1- نأخذها بسن بالتطبيق القانوني

$$x|y \rightarrow x|_\mu y$$

لنعد طوبولوجي



Date : / /



Subject: .....

المعرف بالصيغة:  $\gamma(x) = [x]$

ويعمل هذا التطبيق بأنه:

يصنع كل عنصر من  $X$  إلى صف التماثل الذي يحتويه.

- أن أقوى طوبولوجيا على مجموعة القسمة  $X/\sim$  تجعل التطبيق القانوي لا مستمر، ونحن "طوبولوجيا القسمة" ونرمز له بـ  $\tau_{\sim}$

\* ومن الطبيعي أن مجموعة القسمة مع طوبولوجيا القسمة  $\Rightarrow$  تكون متناه القسمة ويرمز له بالرمز التالي  $(X/\sim, \tau_{\sim})$

والسؤال الآن كيف تبدو المجموعات المفتوحة بناءً على هذا التعريف؟  
أي ما هي الطوبولوجيا فعلياً؟

نبرهن بسهولة أن:

$$\tau_{\sim} = \{ G \subseteq X/\sim : \gamma^{-1}(G) \text{ مفتوح في } X \}$$

ونحن أن المجموعات المفتوحة بفضاء القسمة هي المجموعات التي صورها العكس ومفتوحة التطبيق القانوي هي مجموعات مفتوحة.

$$\gamma^{-1}(\emptyset) = \emptyset$$

$$\gamma^{-1}(X/\sim) = X$$

وبما أن الصورة العكسية لـ  $\emptyset$ ،  $X/\sim$  هي مجموعات مفتوحة  $\Rightarrow$

$$\emptyset, X/\sim \in \tau_{\sim}$$

$$G_1, G_2 \in \tau_{\sim} \Rightarrow \gamma^{-1}(G_1 \cap G_2) = \gamma^{-1}(G_1) \cap \gamma^{-1}(G_2) \in \tau \Rightarrow G_1 \cap G_2 \in \tau_{\sim}$$

$$\Rightarrow G_1 \cap G_2 \in \tau_{\sim}$$

والعلام نعلم يتبع مع الإجماع

- إذا فرضنا أن  $S$  طوبولوجيا أخرى على  $X/\sim$  بحيث لا تطبق مستمر

$$\Rightarrow \text{نفرض } G \in S \Rightarrow \gamma^{-1}(G) \in \tau \Rightarrow G \in \tau_{\sim}$$

أي أن  $S$  طوبولوجيا وهي أقوى طوبولوجيا، حيث أن لا مستمر  $\tau_{\sim} \in S$